Marcin Garbat
Uniwersytet Zielonogórski

Urządzenia i notacje matematyczne dla osób niewidomych – geneza i rozwój

Streszczenie

W artykule przedstawiono genezę i rozwój notacji oraz urządzeń do nauki matematyki dla osób niewidomych, począwszy od prostych urządzeń wspomagających proces kształcenia w dziedzinie matematyki, na notacjach matematycznych skończywszy. Wielkie zasługi w tej kwestii należy przypisać samym niewidomym, a szczególnie Nicholasowi Saundersonowi, Louisowi Antoine'owi, Lwowi Pontryaginowi, Leonardowi Eulerowi i innym, ale nie mniej ważnym osobom w historii niepełnosprawności. W proces ten włączały się również osoby widzące, jak: William Taylor, Victor Narcisse Ballu, William Preston Holly oraz Henry Martin Taylor. Dzięki tym osobom, a szczególnie wynalazkom, urządzeniom i notacjom, które stworzyli, osoby z niepełnosprawnością wzroku zyskały nową szansę na studia oraz karierę naukową w dziedzinie matematyki. Problemy „techniczne", takie jak niemożność czytania tekstów, słuchania czy wypowiadania się, da się przezwyciężyć dzięki pomocy innych osób i aparatury, trudniej jednak pojąć, że można uprawiać naukę bez wykorzystywania wszystkich zmysłów. Wzrok, słuch i pozostałe zmysły wydają się niezbędne do pełnego postrzegania świata, opisywania i tłumaczenia rzeczywistości, czyli tego, czym zajmują się naukowcy. Tymczasem wcale tak nie jest, bo w większości dziedzin nauki najważniejsze jest to, co dzieje się w umyśle. Brak któregoś ze zmysłów może wręcz ułatwić pracę mózgowi. Niewidomi na przykład mają nie tylko bardziej wyczulony słuch i dotyk, ale często również sprawniejszą wyobraźnię matematyczną. Dzięki niej potrafią rozwiązywać problemy, z którymi widzący zmagają się bez większych sukcesów.

Słowa kluczowe: osoba z niepełnosprawnością wzroku, matematyka, notacje matematyczne

Mathematical devices and notations for the blind – the genesis and development

Summary

This paper presents the origins and development of mathematical notation and devices for the blind. Starting from simple devices to support the process of education in the field of mathematics until mathematical notations. The great merit of this issue should be assigned to the blind, and especially Nicholas Saunderson, Louis Antoine, Lew Pontryagin, Leonard Euler and others also important people in the history of disability. Also the sighted people were involved in that process – William Taylor, Victor Narcisse

Ballu, William Preston Holly and Henry Martin Taylor. Thanks to those people, especially their inventions, devices and notations that they created, people with visual disabilities have gained a new opportunity to study and research careers in mathematics. Technical problems, such as the inability to read text, to listen and to speak, can be overcome with the help of other people and equipment. However it is more difficult to understand that they can do science without using all the senses. Sight, hearing, and the rest of the senses seem to be necessary for the full perception of the world, annotation and translation of reality, that is what the scientists are involved in. However, it is not, because in most areas of science, „what is happening in ones head" is more important. Lack of any of the senses may even facilitate the work of the brain. Blind people, for example, are not only more sensitive as far as hearing and touch are concerned, but they are also more efficient in mathematical imagination. Thanks to such ability they can solve the problems that sighted people cannot with much success.

Keywords: visually impaired person, mathematics, mathematical notations

Wstęp

Dawid Hilbert powiedział, że każdy człowiek ma określony horyzont. Gdy ten się zawęża i staje się nieskończenie mały, ogranicza się do punktu. Wówczas człowiek powiada: to jest mój punkt widzenia. Natomiast matematyka jest produktem myśli ludzkiej o szerokim horyzoncie myślenia, niezależnej od doświadczenia, jednak wspaniale pasuje do świata realnego i tak świetnie go tłumaczy. Matematyka (z łac. *mathematicus*, od gr. *μαθηματικός mathēmatikós*, od *μαθηματ-, μαθημα mathēmat-, mathēma*, „nauka, lekcja, poznanie", od *μανθάνειν manthánein*, „uczyć się, dowiedzieć"; prawd. spokr. z goc. *mundon*, „baczyć, uważać") – to nauka dostarczająca narzędzi do otrzymywania ścisłych wniosków z przyjętych założeń, zatem dotycząca prawidłowości rozumowania. Ponieważ ścisłe założenia mogą dotyczyć najróżniejszych dziedzin myśli ludzkiej, a muszą być czynione w naukach ścisłych, technice, a nawet w naukach humanistycznych, zakres matematyki jest szeroki i stale się powiększa[1].

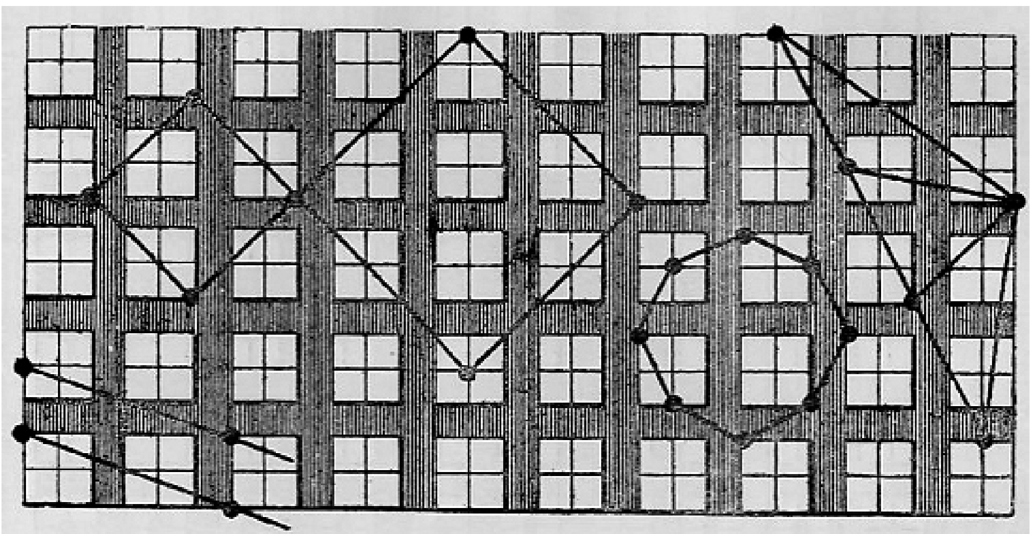
Alfabet brajlowski jest systemem znaków opartych na układzie sześciu wypukłych kropek (punktów) ułożonych w sześciopunkt. To jakby okienko z sześcioma otworami uszeregowanymi w trzy poziome rzędy (jeden nad drugim) – po dwa punkty w każdym. Łącznie tworzą one prostokąt ułożony na krótszym boku. Każde z tych miejsc w sześciopunkcie może być w jakiś sposób zagospodarowane, a dzięki jego wypełnieniu lub pozostawieniu bez zawartości, można tworzyć charakterystyczne, dotykowe kombinacje punktów oznaczające pojedyncze litery. Dzięki temu osoby niewidome korzystające z brajla dotykiem lub użytkownicy czytający wzrokiem mogą zapamiętać kształty liter zbudowanych z punktów.

[1] P. Hoffman, *The Man Who Loved Only Numbers: The Story of Paul Erdős and the Search for Mathematical Truth*, Nowy Jork, Hyperion, 1998, s. 16

Istnieją dwie podstawowe metody pozwalające osobom z niepełnosprawnością wzroku poznać sekrety matematyki. Pierwszy sposób to kompleksowy system notacji, dzięki któremu jesteśmy w stanie wyrazić wszystkie relacje matematyczne, starannie, zwięźle, perfekcyjnie, a zarazem bardzo subtelnie. Drugi sposób to korzystanie z urządzeń zastępujących ołówek i papier, dzięki którym można poznać geometrię, algebrę, trygonometrię, a nawet zawiłe rachunki matematyczne.

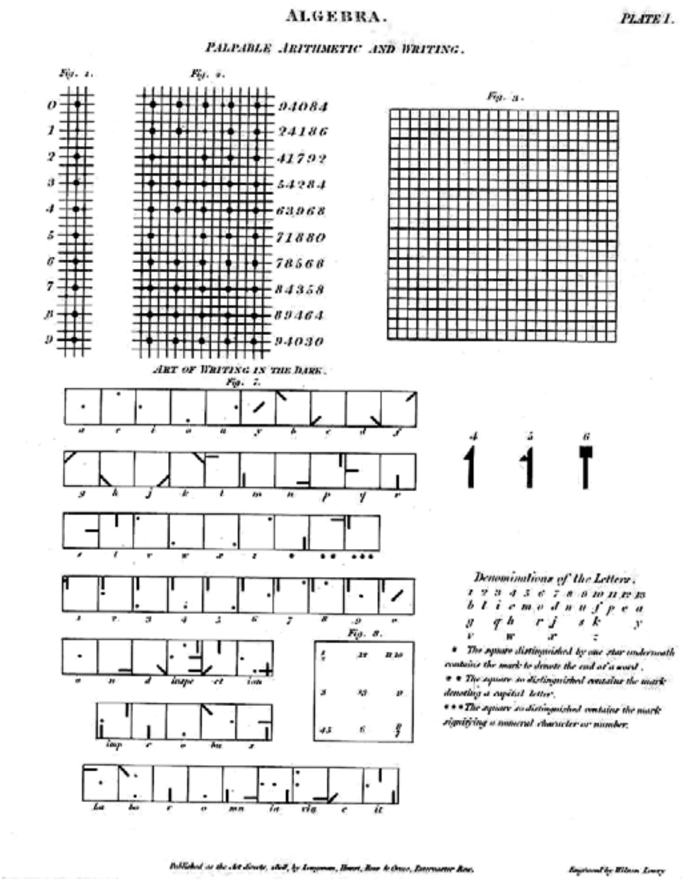
Kalkulatory i inne urządzenia matematyczne dla niewidomych

Arytmetyka i inne gałęzie matematyki zawsze zajmowały ważne miejsce w kształceniu niewidomych, szczególnie prowadzonym przez instytucje edukacyjne. Zauważono, że niewidomi darzą wielkim sentymentem obliczenia arytmetyczne. Podczas gdy umysłowa arytmetyka była powszechnie stosowana, stało się jasne, że w bardziej zaawansowanych gałęziach nauki niewidomi będą potrzebowali specjalistycznych urządzeń. Na szczęście, aby sprostać tym oczekiwaniom, wynaleziono takie urządzenia.



Rysunek 1. Deska algebraiczna Nicholasa Saundersona
Źródło: J. F. Ptak, *A million words on connections in the history of science, math and technology with images, social history and general found environments*, http://longstreet.typepad.com/thesciencebookstore/2008/05/page/3/, [dostęp: 2012-07-18]

Egipcjanie do obliczeń używali kamyków – często wykorzystując tę metodę w uczeniu ludzi, w tym niewidomych. W późniejszych czasach, w Grecji, wymyślono *abax*, *abacus* oraz *scaccarium*. Wtedy też prowadzono niezliczone obliczenia arytmetyczne, używając do tego trzciny, sęków, palców, fasoli, muszli, sznurków lub piasku. Pojawiła się również „namacalna arytmetyka”, wykorzystująca proste urządzenia liczące, w których numery i liczby rozpoznawano dotykiem. Były one stosowane przez niewidomych matematyków, w tym na przykład przez: Leonarda Eulera (1707–1783), który był niewidomy w ostatnich 17. latach życia, Nicholasa Saundersona (1682–1739), Louisa Antoine'a (1888–1971), Lwa Pontryagina (1908–1988)[2].



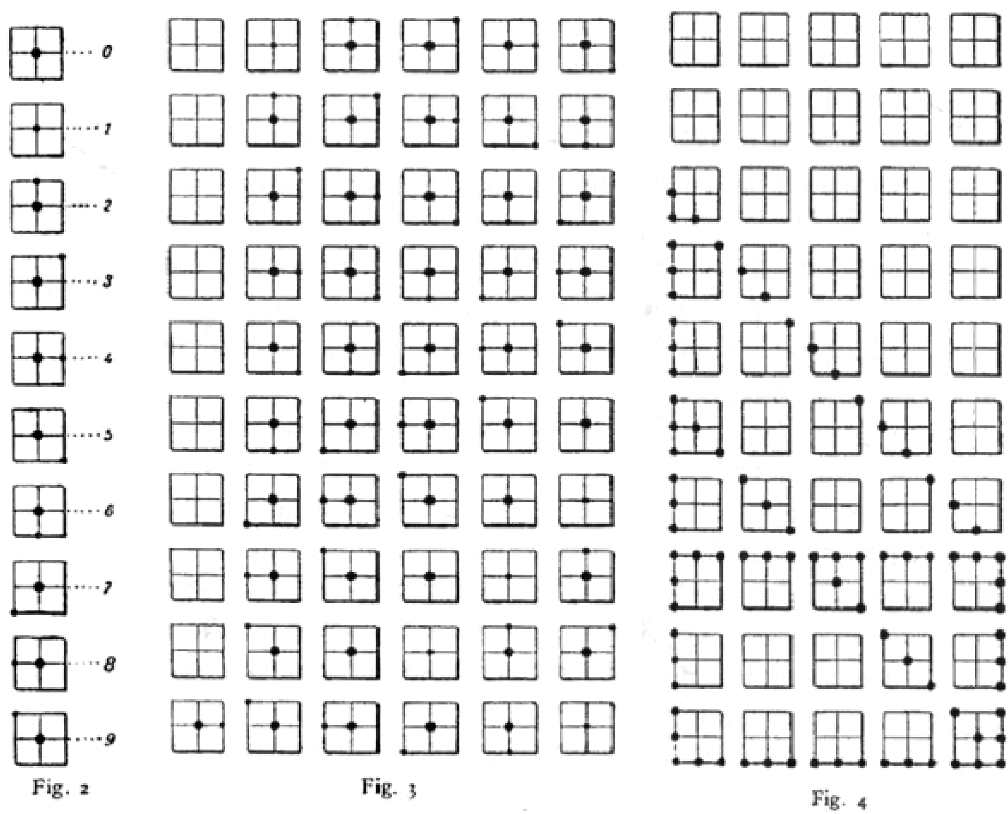
Rysunek 2. Deska algebraiczna Nicholasa Saundersona
Źródło: J. F. Ptak, *A million words on connections in the history of science, math and technology with images, social history and general found environments*, http://longstreet.typepad.com/thesciencebookstore/2008/05/page/3/, [dostęp: 2012-07-18]

Budowę pierwszych konkretnych urządzeń, służących niewidomym do nawet bardziej zawiłych obliczeń arytmetycznych i algebraicznych, należy przypisać

[2] J. F. Ptak, *A million words on connections in the history of science, math and technology with images, social history and general found environments*, http://longstreet.typepad.com/thesciencebookstore/2008/05/page/3/, [dostęp: 2012-07-18]

wielkiemu angielskiemu matematykowi, Nicholasowi Saundersonowi. Ociemniały w dzieciństwie Saunderson, po zapoznaniu się z systemem Lana, opracował tablice, na których przedstawiał informacje przy pomocy główek szpilek. Jak podaje Diderot, Saunderson potrafił na swoich tablicach przeprowadzać rozwiązania zawiłych problemów matematycznych, mógł siebie kontrolować, a zauważone pomyłki usuwać.

Nicholas Saunderson był niewidomym profesorem matematyki w Katedrze Lucasa na Uniwersytecie w Cambridge w Anglii. Urodził się w Thurlstone w Yorkshire w styczniu 1682 r. Jako dziecko całkowicie stracił wzrok w wyniku zniszczenia gałek ocznych przez ospę wietrzną. Niemniej nie przeszkodziło mu to nauczyć się czytać poprzez śledzenie palcem rycin na nagrobkach wokół Kościoła św. Jana Chrzciciela w Penistone.



Rysunek 3. Deska algebraiczna Nicholasa Saundersona
Źródło: J. F. Ptak, *A million words on connections in the history of science, math and technology with images, social history and general found environments*, http://longstreet.typepad.com/thesciencebookstore/2008/05/page/3/, [dostęp: 2012-07-18]

Jego geniusz matematyczny objawił się w młodym wieku, lecz konwencjonalna edukacja w prywatnej akademii w Penistone mu nie odpowiadała i szybko stamtąd odszedł. Zamiast tego studiował na własną rękę, sięgając po książki wyłącznie uznanych autorów, z pomocą osób, które mu czytały. Zbyt ubogi, by formalnie zostać przyjętym, uzyskał możliwość studiowania w Christ's College, Cambridge, gdzie traktowano go z wielkim szacunkiem i zapewniono zakwaterowanie oraz swobodny dostęp do biblioteki. W Cambridge zatrzymał się u swojego przyjaciela, Joshua Dunna.

Aby zarobić na życie, pracował również jako nauczyciel i wykładowca. Za zgodą profesora Williama Whistona wolno mu było uczyć matematyki oraz prowadzić również wykłady z astronomii i optyki. Okazał się tak wybitnym nauczycielem, że brakowało mu czasu dla wszystkich, którzy chcieli być jego studentami. 30 października 1710 r. William Whiston został wydalony z Cambridge. Kiedy zwolniło się tak prestiżowe stanowisko profesora matematyki w Katedrze Lucasa, Saunderson zaprezentował najlepsze kwalifikacje – jego kandydatura została poparta przez samego sir Isaaca Newtona. Ponieważ nie posiadał wymaganego stopnia naukowego, 19 listopada 1711 r. królowa Anna nakazała nadanie mu tytułu LLD, „Doctors of Letters", dzięki czemu został wybrany, jako jeden z czterech, na profesora Lucasian Collegue. Swoją mowę inauguracyjną wygłosił z pamięci, po łacinie, z taką dykcją i w sposób tak pełen gracji, że spotkał się z powszechnym aplauzem słuchaczy.

6 listopada 1718 r. został przyjęty do Royal Society. Był tam wykładowcą do 1723 r., kiedy to ożenił się i zbudował dom w Cambridge. W 1728 r. uzyskał tytuł doktora nauk prawnych. Zmarł na szkorbut 19 kwietnia 1739 r. i został pochowany w prezbiterium kościoła parafialnego w Boxworth niedaleko Cambridge. Saunderson miał wielu przyjaciół, wśród nich również wybitnych matematyków tamtych czasów, takich jak: sir Isaac Newton, Edmund Halley, Abraham De Moivre i Roger Cotes.

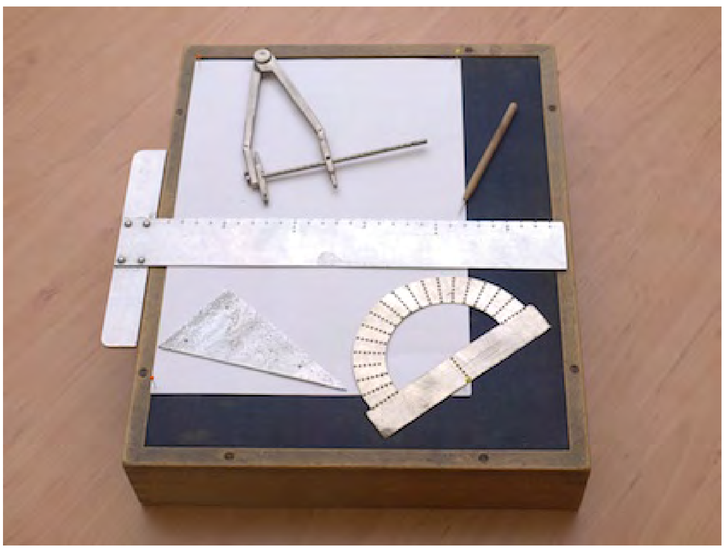
W celu prowadzenia swoich obliczeń, skonstruował kalkulator, który nazwał deską arytmetyczną. Metoda stosowana w tym urządzeniu jest czasami określana jako „namacalna arytmetyka". Urządzenie było eleganckie i proste w działaniu. Saunderson oparł je na urządzeniu „cribbage-board". Dzięki niemu był w stanie wykonywać obliczenia arytmetyczne i algebraiczne. Urządzenie składało się z dziewięciu wierszy, dwóch „pinów" i szeregu małych igieł, umieszczonych w dziewięciu dołkach (osiem po bokach kwadratu i dziewiąty w środku)[3]. Każda pozycja pina – miejsca na wygrawerowanej płycie kalkulatora – odpowiadała konkretnej wartości. Urządzenie Saundersona zostało opisane w jego dziele *Elements of Algebra* (*Elementy algebry*), opublikowanym w Cambridge już po śmierci

[3] S. M. Stigler, *Statistics on the Table: The History of Statistical Concepts and Methods*, Boston, Harvard University, 1999, s. 291–301

autora, w 1740 r. Saunderson jednak nie przedstawił jego działania. Zrobił to dopiero John Colson, który po śmierci Saundersona zastąpił go w Lucasian College, opisując działanie deski algebraicznej w swojej książce *Negativo-Affirmativo Arithmetik*. Napisał tam: „[…] *że to poprzez wykorzystanie tego urządzenia, można było skomponować traktat o algebrze Saundersona*".

W tym miejscu można by podać jeszcze wiele nazwisk niewidomych, którzy opanowali techniki umożliwiające utrwalanie informacji. Większość z nich jednak posługiwała się znakami szyfrowymi. Jedynie nieliczni opanowali alfabet łaciński i posługiwali się nim. Wszyscy jednak należeli do klasy uprzywilejowanej. Nauczanie niewidomych nie było w żaden sposób zorganizowane.

Mniej wybitnym niż Saunderson niewidomym matematykiem, o którym jednak warto wspomnieć, był Herr Weissenberg (ur. 1756 r.), który korzystał ze zmodyfikowanej płyty Saundersona. W następnych latach płyta ta została zmodyfikowana również przez Valentina Haüy – dyrektora instytucji des Jeunes Aveugles.



Rysunek 4. Zeichenkissen (poduszka geometryczna), Wiedeń, początek XIX w.
Źródło: *Von Rastern, Sticheln und Typen*, http://aus-meiner-feder.at/lernen/grundschule/rechenkasten.php, [dostęp: 2013-05-04]

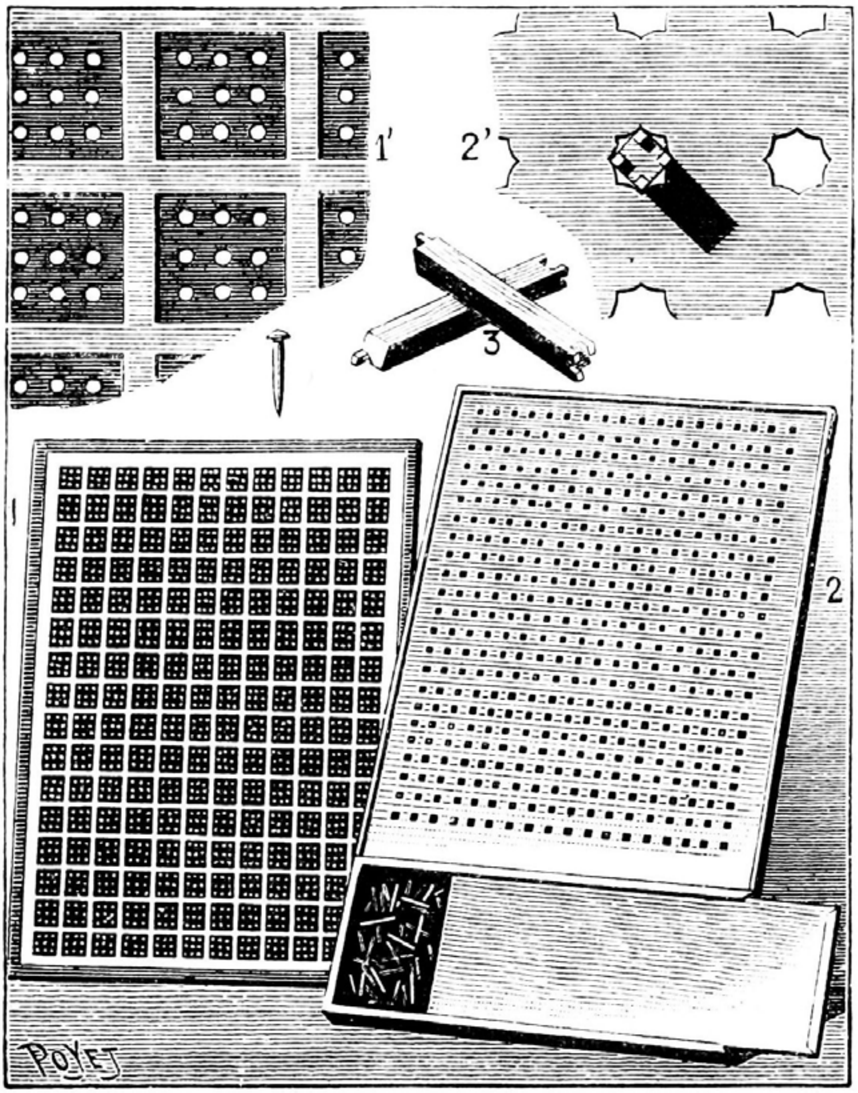
Historia przekazuje również rozmowę, do jakiej doszło pomiędzy niewidomą Mademoiselle de Salignac (ur. w 1744 r.) a Diderotem. Filozof starał się wytłumaczyć niewidomej działanie kalkulatora Saundersona. Opisał to później w jednym ze swoich dzieł: „*Jednego dnia rzekłem do dziewczyny: narysuj sobie sze*ścian. O*dpowiedziała, iż już sobie to wyobraziła. Potem powiedziałem: wyobraź sobie punkt w środku sześcianu. Widzę – odpowiedziała. Z tego punktu narysuj linie* *bezpośrednio do kątów tego sześcianu. Będziesz potem mogła podzielić bryłę na sześć równych piramid. Odpowiedziała: wszystkie wyglądają tak samo. Mają takie same podstawy sześcianu i połowę jego wysokości*"[4]. Mademoiselle de Salignac jest przykładem tego, iż wielu niewidomych chętniej niż algebrą zajmuje się geometrią, co na pozór wydaje się paradoksalne. Daje się to jednak wytłumaczyć funkcjonowaniem mózgu. Bazując tylko na informacjach dostarczanych przez zmysł dotyku i słuchu, niewidomy jest w stanie wyobrazić sobie obiekty w trzech wymiarach lepiej niż widzący, dlatego że u widzących obraz trójwymiarowego świata dociera do mózgu za pośrednictwem siatkówki, na której tworzy się zakłamany obraz mający tylko dwa wymiary. Prawdopodobnie dlatego w dziejach geometrii zapisało się kilku wybitnych niewidomych matematyków. Mademoiselle de Salignac doskonale zrozumiała elementy astronomii, algebry i geometrii. Jej matka czytała jej książki księdza de la Caille. „*Geometria* – powiedziała – *jest prawdą, nauką dla niewidomych, wymaga doskonałości i perfekcji. Geometra przechodzi niemal przez całe życie z zamkniętymi oczami*"[5].

Warto w tym miejscu wspomnieć również Leonarda Eulera (1707–1783), szwajcarskiego matematyka i fizyka, pioniera w wielu obszarach obu tych nauk. Większą część życia spędził w Rosji i Prusach. Jest uważany za jednego z najbardziej produktywnych matematyków w historii. W 1735 r. Euler prawie całkowicie stracił wzrok w prawym oku, ale obarczał winą za ten stan rzeczy drobiazgową pracę kartografa, którą wykonywał dla Akademii Petersburskiej. Wzrok w tym oku pogorszył się Eulerowi w ciągu jego pobytu w Niemczech tak bardzo, że król Fryderyk mawiał o nim „Cyklop". W późniejszym okresie Euler cierpiał na kataraktę w drugim, dotychczas zdrowym oku; doprowadziła go ona już w kilka tygodni po jej odkryciu do niemal całkowitej ślepoty. Mimo tych kłopotów zdrowotnych wydajność Eulera w pracy spadła tylko w niewielkim stopniu – kłopoty ze wzrokiem kompensował fotograficzną pamięcią i umiejętnościami dokonywania obliczeń pamięciowych. Był na przykład zdolny do powtórzenia bez najmniejszego wahania słowo w słowo *Eneidy* Wergiliusza, co więcej: był w stanie wskazać, jakim wersem zaczyna się i jakim kończy dowolna stronica tej książki. Miał również łatwość wykonywania skomplikowanych rachunków w myślach. Trzeba tutaj podkreślić, iż nie każdy matematyk tak świetnie liczy w pamięci, a używanie do tego celu alfabetu Braille'a (który w czasach Eulera jeszcze nie istniał) jest bardzo mozolne. Euler wniósł wkład do niemal wszystkich ówczesnych dziedzin matematyki – geometrii, rachunku różniczkowego i całkowego, trygonometrii, algebry, teorii liczb. W dziedzinie fizyki zajmował się m.in. ciałem stałym, w astronomii – teorią księżyca. Waga jego dokonań w matematyce nie

[4] *Mathematics and the Blind Student*, „New Beacon" 1934, Vol. XVIII, No. 210, s. 146–148

[5] *Mademoiselle Melanie De Salignac, History And Other Thoughts*, http://historyandotherthoughts.blogspot.com/2012/07/mademoiselle-melanie-de-salignac.html#.UkAQoIbt8_k, [dostęp: 2013-09-21]

może być przeceniona: gdyby wydać drukiem wszystkie jego dzieła, z których wiele ma fundamentalne znaczenie, zajęłyby od 60. do 80. woluminów oprawionych *in quart*. Był także twórcą wielu notacji matematycznych, w tym również swojej autorskiej, dzięki której jako niewidomy mógł dokonywać wielu obliczeń.



Rysunek 5. Kalkulatory używane przez osoby niewidome w XVIII i XIX w. 1) Ballu's tablet: 1' detail of squares, a pin. 2) Oury's tablet: 2' detail of the octagons, red pins

Źródło: A. Good, *Writing-machines for the blind*, http://en.wikisource.org/wiki/Popular_Science_Monthly/Volume_33/September_1888/Writing-Machines_for_the_Blind, [dostęp: 2012-07-19]

Inną postacią wartą poznania był Victor Narcisse Ballu (1829–1907) – nauczyciel niewidomych i wynalazca wielu technicznych nośników pisma dla tych osób. Zmodyfikował on tabliczkę (kalkulator) Saundersona do wykonywania obliczeń arytmetycznych. Jego kalkulator składał się z tablicy podzielonej na 192 komórki (12 kolumn i 16 rzędów). Komórki natomiast posiadały po 9 otworów (3x3) – przebitych i ułożonych trójkami oraz ponumerowanych od 1 do 9. W tych otworach były umieszczane kołeczki, które w zależności od ulokowania w odpowiednim otworze wskazywały wartość od 1 do 9. System był stosunkowo prosty, ale opanowanie go pochłaniało dużo czasu[6].

Od czasów Victora Narcisse'a Ballu powstało bardzo wiele różnych tablic, desek lub tabliczek, które służyły jako pomoc w obliczeniach działań matematycznych. Jednym z najlepszych jest ośmiokątna płyta arytmetyczna, wynaleziona w 1836 r. przez Williama Taylora z Yorkshire School for the Blind.

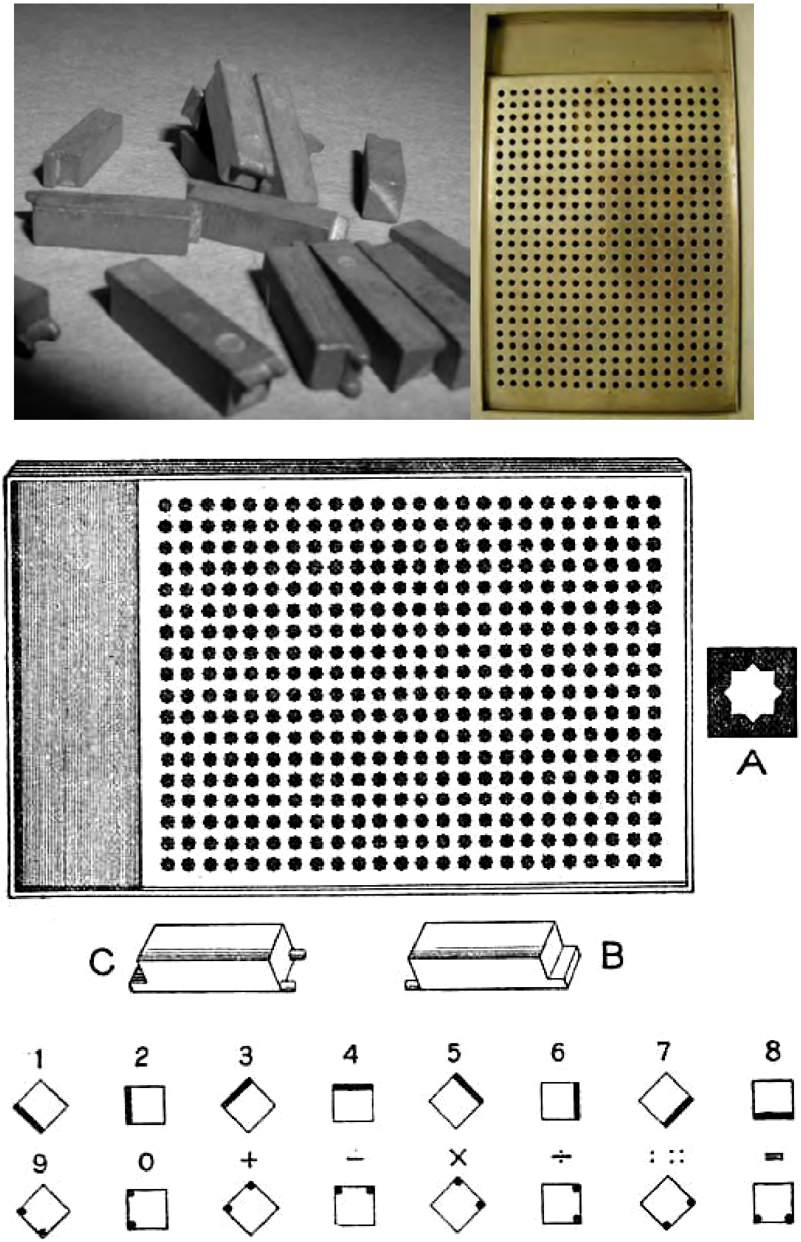
William Taylor był pastorem. Rozpoczął pracę z niewidomymi w Yorkshire School for the Blind 20 kwietnia 1835 r. i kontynuował ją do grudnia 1845 r. W szkole uczył głównie algebry i arytmetyki. Już po paru miesiącach pracy z niewidomymi uczniami doszedł do wniosku, iż potrzebne jest urządzenie pozwalające im poznać szyk cyfr składający się na rachunek algebraiczny. Uznał, iż do tego celu niezbędna jest pomoc dydaktyczna, najlepiej w formie tablicy, analogicznie jak w przypadku pisma wypukłego. W styczniu 1836 r. przedstawił swoim uczniom pierwszą wersję stworzonej przez siebie płyty matematycznej. Uczniowie pracowali na niej aż do wakacji. Pozwoliło to Taylorowi zebrać bezcenne uwagi, dotyczące praktycznej strony tego urządzenia. W listopadzie 1836 r. przedstawił już ostateczną wersję swojej tablicy. Rada nauczycieli Yorkshire School for the Blind przychyliła się do jego wniosku i wprowadziła tablice do programu nauczania algebry. Tablice te stosowano aż do końca lat 70. XX w.[7].

Ośmiokątna płyta Williama Taylora składa się z prostokątnej aluminiowej ramy, w której znajdują się 432 ośmiokątne komórki, ułożone w 24. rzędach i 18. kolumnach. Do obliczeń używa się specjalnych szpilek. Na jednym końcu szpilki znajduje się krawędź z podniesionym widocznym grzbietem, a na drugim końcu jest podobny grzbiet, ale podzielony, z głębokim wycięciem w środku. Otwory w tablicy były w kształcie gwiazdy, z wyraźnie umieszczonymi ośmioma punktami. Dzięki temu szpilka mogła być umieszczona w ośmiu różnych pozycjach. W zależności, w jakiej pozycji się ją umieściło, zarówno szpilkę, jak i jej grzbiet, można było uzyskać kilkanaście kombinacji matematycznych. Odpowiednio odwracając szpilkę, tak aby nacięty grzbiet był na górze, możemy uzyskać dziesięć znaków związanych z cyframi arabskimi i sześć zwykłych znaków algebraicznych – razem szesnaście pozycji. Zatem proste działanie 1+3=4 w systemie

[6] A. Good, *Writing-machines for the blind*, http://en.wikisource.org/wiki/Popular_Science_Monthly/Volume_33/September_1888/Writing-Machines_for_the_Blind, [dostęp: 2012-07-19]

[7] *Mathematics and the Blind Student*, „New Beacon" 1934, Vol. XVIII, No. 210, s. 146–148

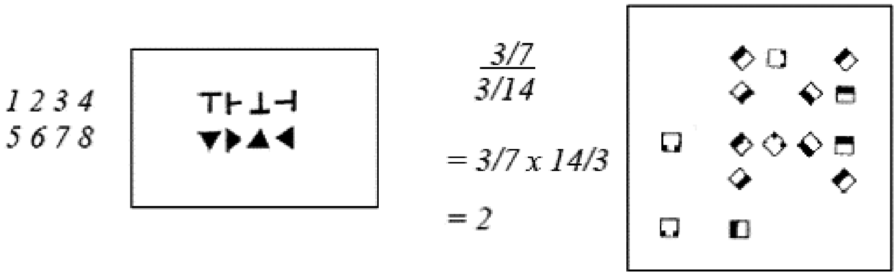
Taylora przedstawimy następująco: , ale już $(2x+3)(x2-x-5)$ – .



Rysunek 6. Ośmiokątna płyta Williama Taylora z 1836 r.
Źródło: *Education of the Blind*, http://www.newadvent.org/cathen/05306a.htm, [dostęp: 2012-07-19]

Do obliczeń algebraicznych potrzebna jest dodatkowa szpilka, różniąca się od tej stosowanej w arytmetyce. Niemniej szesnaście dodatkowych znaków, jakie można uzyskać dzięki temu urządzeniu, daje liczbę kombinacji w zupełności wystarczającą. Mersalius Oury opracował modyfikację tabliczki Taylora, dzięki czemu stała się ona bardziej czytelna również dla osób widzących[8].

Drewniana deska matematyczna z 60. dziurkami, z podwójną końcówką, była doskonale znana i stosowana w New York Institute for the Blind, w Pelham, w Nowym Jorku, już około 1900 r. Ten arytmetyczny system zapisu arytmetycznego dla niewidomych bazował na płytce z otworami i kwadratowych kołkach – każdy z innym znakiem na obu końcach. Otwory na płycie były kwadratowe, dając każdemu typowi osiem możliwych pozycji.

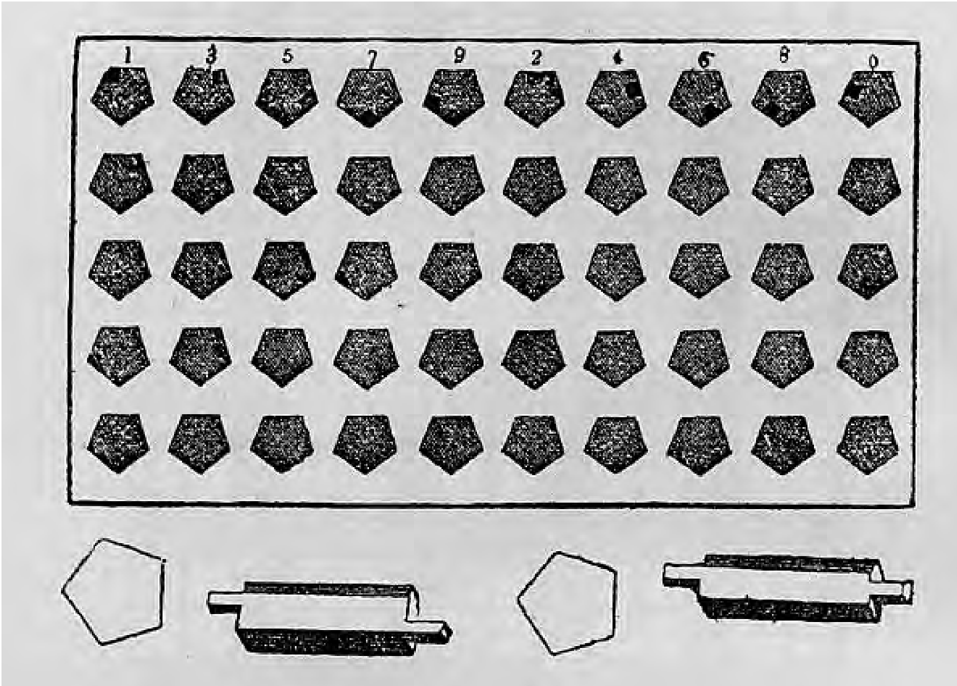


Rysunek 7. Działanie matematyczne za pomocą: 1) deski z Instytutu Pelham, 2) ośmiokątnej płyty Taylora
Źródło: *Education of the Blind*, http://www.newadvent.org/cathen/05306a.htm

Do czasu skonstruowania kalkulatora Christiana Mayera nie było innego urządzenia, pozwalającego wykonywać obliczenia algebraiczne osobom pozbawionym wzroku. Mayer działanie kalkulatora opublikował w *Arithmetic of Sines*, wydanej w 1727 r. Zasada działania jego kalkulatora była zgoła odwrotna niż ta zastosowana w desce algebraicznej Saundersona, gdzie kształt i rozmieszczenie kołków w otworach (na przykład pochyły lub nie) wyrażał ich wartość, a nie ich umiejscowienie na płytce. Kalkulator Meyera składał się z płytki z 50. pięciokątnymi otworami (10 kolumn, 5 rzędów), do których wkładano kołki[9].

Innym urządzeniem był Artefakt – kalkulator arytmetyczny – wynaleziony przez Williama Prestona Holly'ego (1893–1961). Preston był niewidomym. W 1904 r., jako student Florida School for the Deaf and the Blind, St Augustine, korzystał z Artefaktu (zwanego też łupkami arabskimi), jako pomocy dydaktycznej, podczas zajęć z matematyki i rachunkowości. Po skończeniu nauki w dalszym ciągu używał urządzenia w swojej pracy zawodowej jako handlowiec. Po

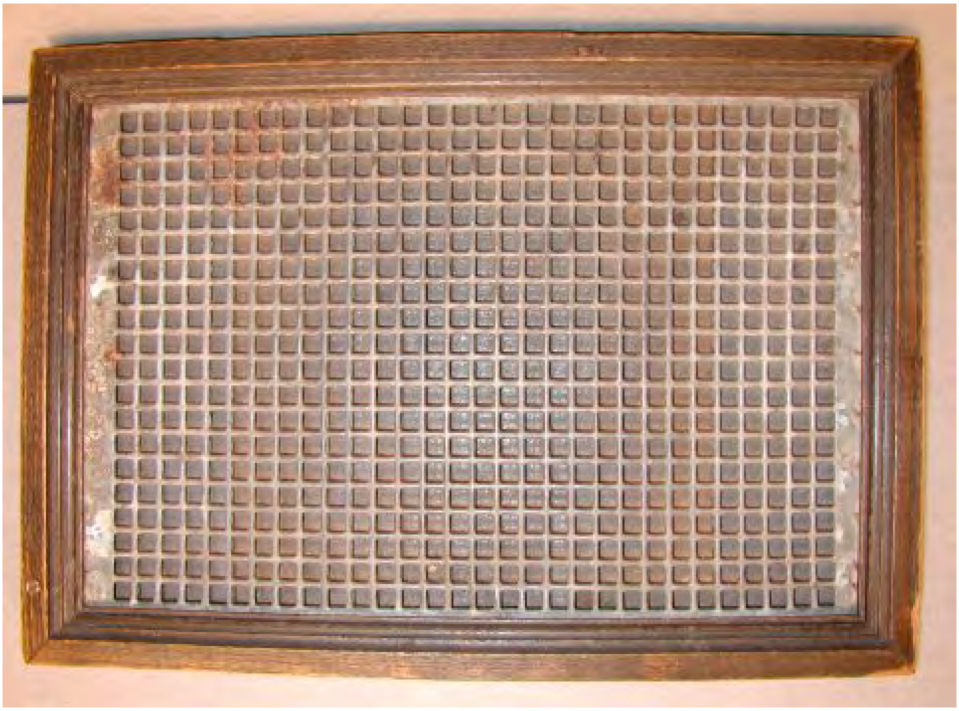
[8] Tamże
[9] Tamże



Rysunek 8. Kalkulator Christiana Meyera
Źródło: J. F. Ptak, *A million words on connections in the history of science, math and technology with images, social history and general found environments*, http://longstreet.typepad.com/thesciencebookstore/2008/05/page/3/, [dostęp: 2012-07-18]

jego śmierci, urządzenie (wraz z patentem) trafiło do jego córki, Buelah Brazzell, która zajęła się jego marketingiem i sprzedażą. Pierwotnie był nazywany Łupkiem Arabskim, ponieważ stosowanie tego rodzaju pomocy matematycznej rozwijało się na początku XIX w. w Paryżu, we Francji. Jedno ze źródeł z 1910 r. nazwało ten rodzaj liczenia metodą paryską. W 1936 r. American Printing House for the Blind opracował własny model, zwany „Ramką Arytmetyczną" (Bertha Shepard Slate).

Artefakt posiadał drewnianą ramę i metalową siatkę z 600. komórkami (20 kolumn i 30 wierszy), w których umieszczano ołowiane kwadratowe klocki o wymiarach 25x25". Każdy klocek miał niewielką wypukłość z cyframi arabskimi (od 0 do 9) na jednym końcu i wciętą linię do prowadzenia w miejscu docelowym. Łupek został zaprojektowany jako instruktażowe narzędzie pomocy przy problemach matematycznych, takich jak dzielenie, mnożenie, odejmowanie i dodawanie. Natomiast Bertha Shepard Slate to ramka składająca się z 432. stożkowych komórek (18 komórek w pionie i 24 komórki w poziomie) i trzech owalnych przedziałów-zasobników do przechowywania klocków. Zasada działania była podobna do Artefaktu Holly'ego.



Rysunek 9. Artefakt – kalkulator arytmetyczny – wynaleziony przez Williama Prestona Holly'ego
Źródło: *American Printing House*, http://www.aph.org/museum/virtual_exhibit/exhibit3/e30016b.htm, [dostęp: 2013-05-04]

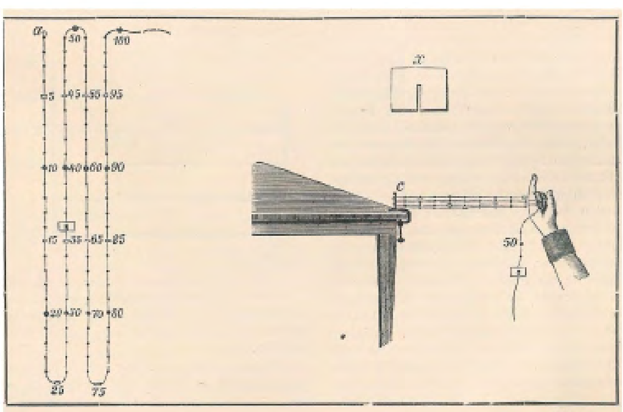
Na początku XIX w. pojawił się „Wiener Rechenkasten", czyli wiedeński wynalazek. Opiera się na bardzo prostej zasadzie: w metalowej siatce umieszczano małe kołki, na których wytłoczone były cyfry i znaki matematyczne. Metoda ta nie tylko pozwala na łatwiejszą obsługę, ale również szybką korektę nieprawidłowego działania lub obliczenia. Nieprawidłowe działanie, cyfry lub znaki dawały się łatwo usunąć i zastąpić poprawnymi. Wszystko to było umieszczone w drewnianej skrzynce[10].

Po lewej stronie skrzynki znajdował się tablet do pisania. Była to metalowa siatka z małymi kwadratowymi zagłębieniami, o rozmiarach 0,5x0,5 cm, na której dokonywano operacji obliczeniowych za pomocą układania w niej kołków. Kołki znajdowały się w prawej części, która z kolei była podzielona na kilka prostokątnych komór o różnych rozmiarach. Ułatwiało to segregację kołków i ich rozpoznanie.

[10] *Von Rastern, Sticheln und Typen*, http://aus-meiner-feder.at/lernen/grundschule/rechenkasten.php, [dostęp: 2013-05-04]

Rysunek 10. Wiener Rechenkasten
Źródło: *Von Rastern, Sticheln und Typen*, http://aus-meiner-feder.at/lernen/grundschule/rechenkasten.php, [dostęp: 2013-05-04]

Zupełnie innym urządzeniem był Rechenschnur (sznur kalkulacyjny). Dzięki niemu uczono podstaw arytmetyki. Było to proste urządzenie, składające się ze sznurka, na którym umieszczono 100 kulek (lub koralików) w równych odległościach. Co dziesiąty z nich, aby oddzielić części dziesiętne, był innej wielkości. Urządzenie to przypominało korale, dlatego często nazywano je naszyjnikiem arytmetycznym. Wiemy, iż z urządzenia takiego korzystała, wspomniana wcześniej, Mademoiselle de Salignac.



Rysunek 11. Rechenschnur z XIX w.
Źródło: *Von Rastern, Sticheln und Typen*, http://aus-meiner-feder.at/lernen/grundschule/rechenkasten.php, [dostęp: 2013-05-04]

W 1914 r. Gordon B. Brown, nauczyciel matematyki, został przyjęty do Principle of Worcester College for the Blind, i z entuzjazmem oraz wielkim zaangażowaniem przystąpił do edukacji swoich niewidomych uczniów. Opracował między innymi specjalną płytę, umożliwiającą uczniom robienie wykresów algebraicznych i trygonometrycznych.

Rysunek 12. Bertha Shepard Slate
Źródło: *American Printing House*, http://www.aph.org/museum/virtual_exhibit/exhibit3/e30008b.htm, [dostęp: 2013-05-04]

Kilka lat później zaistniał Stuart Emblen. Był on nauczycielem panny Sadie lsaacs – genialnej niewidomej dziewczyny, która w 1924 r. uzyskała dyplom z wyróżnieniem, a dzięki niemu – stypendium dla uzdolnionych studentów na Uniwersytecie w Londynie. Nie mogłaby tego osiągnąć, gdyby nie specjalne urządzenia do nauki matematyki. Koło zębate, ołówek i kompasy, umożliwiające uczniom tworzenie własnych figur geometrycznych, wynalezione zostały wiele lat wcześniej przez Guya Campbella, ale Emblen o nich nie wiedział. W rezultacie sam wymyślił matematyczną tablicę demonstracyjną, która była powszechnie stosowana w geometrii do kreślenia wykresów. Składa się z płyty pokrytej suknem, podzielonej na kwadraty o wymiarach pół cala na pół cala, do której przypina się szpilki. Figury geometryczne, takie jak trójkąt lub równoległobok, powstają w ten sposób, że na szpilkach przypiętych do płyty umieszcza się gumki.

Okręgi wykonane z elastycznych taśm stalowych, z rowkiem na jednym końcu, aby umożliwić wprowadzanie innych, nawet skomplikowanych rysunków, takich jak dziewięciokąt wpisany w okrąg lub opisany na okręgu. Dzięki temu Sadie mogła poznać nawet skomplikowane figury geometryczne oraz wykresy trygonometryczne. O jej sukcesach rozpisywała się prasa codzienna na Wyspach. Jeden z artykułów ukazał się 20 sierpnia 1929 r. w „The Children's Newspaper".

8 *The Children's Newspaper* August 24, 1929

CAT AMONG THE RATS
Are Animals Born with Fear?
HOW THE SIGHT OF A CAR "FROZE" A PONY
From a Professor's Chair

A very interesting question is whether one animal may have an inborn fear of another. You may argue about this all day, and not be any "forrarder." The only way to answer the question is the scientific way: Look and see.

This has been done by Dr. Coleman Griffith, of the Psychological Laboratory of the University of Illinois. He introduced a cat among young and inexperienced white rats. One male was exploring the top of a nest-box when the cat, which was not hostile, was introduced. He immediately "froze," and hung for 22 minutes, one toe after another slipping loose, until finally he dropped to the floor and remained on his back and side. Full recovery took about an hour.

What is certain is that the inexperienced rat ceases from its ordinary behaviour and becomes almost as if it were paralysed. Whether this corresponds to what man calls fear is another question, and we cannot get at the rat's inner life. The curious stiffness may be accompanied by a quickening of the heart-beat and the breathing movements; the rat behaves as we sometimes do when afraid. It is not very often that man is paralysed with fear, but we have seen a Highland pony so stiffened by the approach of a motor-car that it had to be lifted off the road as if it were frozen.

When the Rat Awakes

The cats, which were keen on mice, were not interested in the white rats. Only the youngest spat and struck when a rat was pushed too near her. But from a very early age—three weeks old—the rats were intensely aware of the cats; and a notable fact was made clear, ...

BLIND SCHOLAR'S FEAT
A Triumph of Will Power
SPLENDID STORY FROM LONDON UNIVERSITY

A blind nineteen-year-old Shoreditch girl, Sadie Isaacs, has passed the matriculation examination of London University by writing her answers to the questions in the Braille alphabet for the blind, and she is the first who has ever succeeded in doing so.

Sadie Isaacs

One can imagine a blind scholar dictating answers to someone who is not blind, but to tackle the papers alone, and write by feeling, is a task that might well have appalled the most resolute spirit. Miss Isaacs' matriculation success has followed many distinctions at the Central Foundation School in London, where she did remarkably well, though she has been blind ever since she was eight.

The greatest difficulty was in answering the mathematical paper, as figures or diagrams outside the Braille system had to be used. Thus, for Euclid, pins had to be used to represent angles, and rubber bands placed round them to represent lines. In consequence of this difficulty half-an-hour extra was allowed for the mathematical sitting.

No doubt the answers were read to the examiners by a Braille expert.

Few more striking instances of triumph over difficulties can ever have been achieved than this wonderful escape from the hampering restrictions of total blindness.

FAMOUS EUROPEAN
Living in His Stable

People in the British Islands do not realise how strongly topsy-turvy life has become in places where revolution has upset ordinary life. Here is an instance worth thinking over. ...

SANCTUARY
Bad Old Custom that has Gone

BIRD FOLLOWS ITS NEST
No Place Like Home

INVENTIONS & IDEAS
Things Just Patented

TWO GOOD THINGS
Dartmoor Prison and Its Future
A MILESTONE ON THE PATH OF PROGRESS

THE BARNACLES FROM MEXICO
Landed by a C.N. Reader
A PRIZE FOR A BEACH LOUNGER

POINTS FOR WIRELESS BOYS
Post Office Regulations

Rysunek 13. Artykuł o Sadie lsaacs, który ukazał się 20 sierpnia 1929 r. w „ The Children's Newspaper"

Źródło: *Look and learn. History Picture Library*, http://www.lookandlearn.com/childrens-newspaper/index.php, [dostęp: 2013-04-15]

Na podobny pomysł wizualnego przedstawienia problemu, ale już na szerszą skalę, bo z dziedziny topologii (nauki zajmującej się tymi własnościami figur i brył geometrycznych, które nie zmieniają się pod wpływem deformacji), polegającego na wywróceniu sfery na lewą stronę bez jej dziurawienia, wpadł Bernard Morin (ur. w 1931 r.), francuski matematyk niewidomy od szóstego roku życia.

W 1918 r., Henry Martin Taylor (1842–1927) – angielski matematyk i adwokat – wprowadził do nauki notację algebraiczną, która wzbogacała użyteczność arytmetycznej ramki Taylora (wynalezionej wiele lat wcześniej przez jego imiennika – Williama Taylora). Razem z Emblenem opracowali broszurę *How to write Arithmetic and Algebra by means of the Joint Type Method* (*Jak przedstawić arytmetykę i algebrę w metodologiczny sposób*). Wcześniej Emblen wydał pod swoją redakcją *Guide to the writing of Arithmetic and Algebra, with Mathematical and Chemical Formulae* (*Przewodnik pisania arytmetyki i algebry z wykorzystaniem formuł matematycznych i chemicznych*). Jest to studium, które umożliwia brajliście, bez względu na to czy jest on matematykiem, czy nie, przetłumaczenie na brajla każdej książki naukowej z matematyki. Dzięki temu ukazał się szereg publikacji: Charles Godfrey i Gawin Murdoch Bell, *Winchester Arithmetic* (*Arytmetyka Winchestera*), Charles Godfrey i A. W. Siddons, *Elementary Algebra* (*Elementarna algebra*), Charles Darwin, *Tides and Other Phenomena of the Solar System* (*Przypływy i inne zjawiska Układu Słonecznego*), John Edward Marr, *Introduction to Geology* (*Wstęp do geologii*), Ciryl Ernest Ashford, *Electricity and Magnetism* (*Elektryczność i magnetyzm*), William Charles Fletcher, *Elements of Plane Trigonometry* (*Elementy trygonometrii*), William Eggar, *Mechanics* (*Mechanika*), James Jeans, *Universe Around Us* (*Wszechświat wokół nas*). Wszystkie te publikacje były bogato ilustrowane schematami w wersji brajlowskiej i czarno-białej. Pokazuje to, że system notacji matematycznej i chemicznej, opracowany przez Taylora i Emblena, był w stanie sprostać bardzo dużym wymaganiom i pozostawał zrozumiały[11].

Emblen opracował również tabele wag i miar zwane *A Text Book of Mathematical Tables* (*Tablice Matematyczne*), które zawierały logarytmy, wskaźniki trygonometryczne i inne wzory napisane w wersji brajlowskiej i czarno-białej[12].

Wybitny radziecki matematyk Lew Pontryagin (1908–1988), który stracił wzrok w wyniku poparzeń (niektóre źródła podają, iż w wyniku wybuchu gazu), gdy miał 14 lat, w swoich wspomnieniach pisał, że zaraz po powrocie ze szpitala do szkoły trudno mu było zrozumieć lekcje matematyki. Brał nawet korepetycje. Ale w końcu pokochał matematykę, przede wszystkim dzięki pomocy matki, która czytała mu na głos prace naukowe i książki, choć nie miała wykształcenia w tej dziedzinie. Z nieznanymi symbolami we wzorach radziła sobie, używając

[11] *Mathematics and the Blind Student*, „New Beacon" 1934, Vol. XVIII, No. 210, s. 146–148
[12] Tamże

Rysunek 14. Liczydło z cyframi w systemie Braille'a – Royal Victorian Institute for the Blind (koniec XIX w.)
Źródło: *Antique Typewriters, Tech Know Bits – Technology – The Way India*, http://museumvictoria.com.au/collections/items/259856/abacus-royal-victorian-institute-for-the-blind-circa-1920s-1950s, [dostęp: 2012-07-14]

nazw, które sama wymyślała. I tak na przykład na symbol oznaczający sumę zbiorów (U) mówiła „ogony do góry", a na symbol iloczynu zbiorów (?) – „ogony w dół!". Aby pomóc synowi, nauczyła się nawet czytać w obcych językach. Gdy Pontryagin trafił na Uniwersytet Moskiewski w 1925 r., szybko zaprzyjaźnił się z Pawłem Aleksandrowem, który prowadził prace badawcze dotyczące topologii i teorii mnogości. W latach 1930–1940 poświęcił się całkowicie topologii. Jego prace zostały zebrane i opublikowane. W 1931 r. był jednym z pięciu sygnatariuszy Deklaracji w sprawie reorganizacji Towarzystwa Matematycznego w Moskwie. Pracował przez wiele lat jako przewodniczący wydziału na Uniwersytecie Moskiewskim oraz jako redaktor naczelny prestiżowego pisma *Matematicheskii Sbornik*. W 1934 r. Pontryagin zdobył międzynarodową sławę za częściowe wyjaśnienie zagadnienia ze zbioru 23. problemów słynnego Davida Hilberta. W tym samym czasie rozpoczął studia nad teorią sterowania, pracę, która doprowadziła do jego fundamentalnej monografii *Teoria optymalnych procesów*, wydanej w 1961 r. W późniejszych latach napisał kilka innych dzieł faktograficznych z matematyki.

Potem pojawił się komputer, zaawansowana technologia informatyczna i Internet. Zastosowanie komputera w wielu dziedzinach stało się realne wraz z rozwojem masowej produkcji mikrokomputerów. W ostatnim dwudziestoleciu pojawiło się na rynku wiele konstrukcji komputerów domowych, osobistych, przenośnych. Wyraźnie widać tendencje wyposażania nowoczesnego komputera w coraz to nowsze funkcje, np. multimedialne, komunikacyjne, a także jego integrację z urządzeniami domowymi. Ze wzrostem możliwości sprzętu następował rozwój systemów operacyjnych i oprogramowania użytkowego, a także poszerzał się rynek odbiorców w różnych dziedzinach ich zastosowań. Równolegle odkrywano nowe możliwości zastosowania komputerów i osiągnięć informatyki dla osób niepełnosprawnych, zarówno w sensie technicznym (rozwój wyspecjalizowanej inżynierii rehabilitacyjnej), jak i w sensie materialnym (dostępność masowo produkowanego sprzętu dla przeciętnego użytkownika). Przekonał się o tym prof. Gardner, na co dzień wykładający na Uniwersytecie Stanowym Oregon, który stracił wzrok w 1988 r. Mimo to nie zrezygnował z kariery naukowej. „*Po utracie wzroku, do której doszło, kiedy byłem już profesorem fizyki, zdałem sobie jednak sprawę, jak duże trudności mają niewidomi z pozyskiwaniem informacji z zakresu matematyki*” – mówił Gardner. Aby niewidomi mogli odczytywać skomplikowane zapisy matematyczne – zawierające złożone ułamki, wskaźniki potęgi czy pierwiastki, niezbędne stało się opracowanie matematycznej notacji w alfabecie Braille'a.

Wspólnie z zespołem naukowców z Uniwersytetu Stanowego Oregon John Gardner zaprojektował translator Braille'a, wykorzystujący serię drukarek tłoczących View Plus. Według Gardnera, nowa metoda – wyrównująca szanse niewidomych i widzących – umożliwiła niewidomym efektywne studia w zakresie matematyki, a nawet karierę naukową.

W ramach nowej metody odpowiedni program zainstalowany w komputerze tłumaczy najpierw zwykły tekst z działaniami matematycznymi, zapisanymi w systemie Windows, na alfabet Braille'a. Właśnie w takiej postaci otrzymujemy wydruk – jako serię wypukłych znaków pisma punktowego służących do czytania dotykowego. Jak zapewnia Gardner, jest to jedyny translator, który bezpośrednio transformuje czcionki z ekranu komputera w dokumencie MC Office na czcionki brajlowskie. Drukarka drukuje na różnego rodzaju materiałach – od papieru po gruby plastik. Technologia pozwala na drukowanie tłoczonej grafiki z każdego programu posiadającego drukowanie w swym menu. Użytkownik może mieszać tekst brajlowski z tabelami, wykresami lub clipart, czy ze skanowaną grafiką, a nawet z grafiką tworzoną przez użytkownika. Drukarki tłoczą grafikę z wyjątkowo wysoką rozdzielczością i możliwością automatycznego wybijania kropek o różnej głębokości dla różnych kolorów[13].

Notacje matematyczne dla niewidomych

Brajlowska notacja matematyczna jest bardzo skomplikowanym i trudnym zagadnieniem, gdyż trzeba zapisać w jednej linii złożone, wielopoziomowe, zawierające czcionkę o różnym kroju i wielkości wzory matematyczne alfabetem wynalezionym w 1829 r. przez Ludwika Braille'a. Najstarszą notacją matematyczną w systemie Braille'a jest działanie Abrahama Nemetha w 1946 r., oparte na

[13] *Szansa dla niewidomych na karierę naukową w dziedzinie matematyki*, http://www.naukawpolsce.pap.pl/aktualnosci/news,18464,szansa-dla-niewidomych-na-kariere-naukowa-w-dziedzinie-matematyki.html, [dostęp: 2013-09-20]

piśmie 6-punktowym. W Polsce do zapisu działań matematycznych wykorzystuje się zasady stosowane w tzw. notacji marburskiej, nazywanej także Efezerem od nazwiska twórcy – Helmuta Ephesera – profesora matematyki na Uniwersytecie w Hanowerze. Jest to stara notacja matematyczna, która pochodzi z 1930 r. Mimo że notacja ta nosi miano „międzynarodowej", to jednak przyjęła się głównie w krajach niemieckojęzycznych, w Holandii i w niektórych krajach Europy Środkowej. Z niej wywodzi się szereg innych notacji.

W lipcu 1929 r. Międzynarodowy Kongres Niewidomych w Wiedniu powołał dwunastoosobową Komisję Międzynarodowej Notacji Matematycznej, która pracowała do 1937 r. Brytyjski członek Komisji, pułkownik Colonel Stafford, na podstawie prac Komisji opublikował w 1941 r. *International Braille Code of Mathematics and Chemistry* (*Międzynarodową brajlowską notację matematyczną i chemiczną*). Wiele lat potem powiedział: „*Zadanie nie było łatwe, ponieważ poszczególne kraje opierały się przyjęciu tej notacji, mając własne. Jednakże twórcy tej notacji mieli nadzieję, iż tak jak w przypadku notacji muzycznej Braille'a, która zburzyła granice, to podobna unifikacja może być osiągnięta w dziedzinie matematyki i nauk przyrodniczych*"[14].

Została ona wydana w wersji brajlowskiej przez Narodowy Instytut Niewidomych. Jednak system ten nie tworzył ze zwykłym systemem brajlowskim jednolitego zbioru oznaczeń. Następnie dr Gerrit van der Mey (Holandia) podjął próbę unifikacji i rozszerzenia międzynarodowej notacji matematycznej. Zainicjowało to utworzenie towarzystwa badawczego, które w 1950 r. powołało dr. Helmuta Ephesera na swojego przewodniczącego. Efektem pracy tej grupy było wydanie w 1955 r. w brajlu publikacji *Internationale Matematik Schrift für Blinde* (*Międzynarodowa notacja matematyczna dla niewidomych*). Notacja ta zawierała zarówno wszystkie używane wówczas symbole matematyczne, jak również zasady ich tworzenia.

Jak pisze Jan Omieciński, jest to bardzo cenna pozycja, gdyż umożliwia niewidomemu zarówno zapoznanie się z brajlowską notacją matematyczną, jak i symbolami czarnodrukowymi. Okazuje się, że osoby widzące, nawet studenci matematyki, często nie potrafią prawidłowo nazwać danego symbolu lub greckiej litery. Wiedzą, co oznaczają, ale z nazwaniem mają problemy. „*W takich sytuacjach, gdy byłem jeszcze na studiach, wyszukiwałem w poradniku wypukły symbol lub litery, dzięki czemu mogłem je prawidłowo zapisać w brajlu*"[15].

W 1946 r. opublikowano tzw. Nemeth Code. Niestety, ma on niewiele wspólnego ze wspomnianą wcześniej Międzynarodową Notacją Brajlowską. Różnice występują już nawet w zapisie podstawowych operatorów matematycznych. Zasadą amerykańskiej notacji jest, oprócz wiernego oddania oryginału, możliwie

[14] *Mathematics and the Blind Student*, „New Beacon" 1934, Vol. XVIII, No. 210, s. 146–148
[15] J. Omieciński, *Brajlowska notacja matematyczna*, „Tyfloświat" 2012, Nr 2 (16), s. 7

najdokładniejsza, chociaż umowna, interpretacja symboli graficznych stosowanych przez ludzi widzących. Tendencji tej nie obserwujemy w międzynarodowej notacji, gdzie raczej przestrzegana jest zasada oszczędności zapisu. Ten system przyjął się w Stanach Zjednoczonych i Kanadzie. Stare notacje zazwyczaj wystarczają do zapisu działań na podstawowym i średnim poziomie edukacji matematycznej. Do bardziej skomplikowanych zapisów już na poziomie akademickim wykorzystywane są notacje komputerowe, np. ASCII (standardowy zapis linearny stosowany w językach programowania), GS Braille (Gardner, Salinas – notacja inspirowana zapisem w systemie LaTeX), SMSB (Stuttgarter Mathematikschrift für Blinde). Wywodzą się one ze stosowanych w komputerach rodzajów zapisywania wyrażeń matematycznych. Uwzględniają one nie tylko języki oprogramowania i składu tekstu, ale bardzo często wykorzystują brajla ośmiopunktowego[16].

W Polsce, po przetłumaczeniu i wydaniu w brajlu, Międzynarodowa Notacja Matematyczna obowiązuje od 1967 r. W tymże roku PZN wydał w brajlu jej tłumaczenie z języka angielskiego, dokonane przez Marię i Andrzeja Adamczyków. Na 141 brajlowskich stronach znajdują się: tablice znaków matematycznych, omówienie brajlowskiej notacji matematycznej oraz alfabet grecki i gotycki. Notacja jest prezentowana w formie 3-kolumnowej tabeli o strukturze „nazwa – czarnodruk – brajl". Notacja ta pozwala na zapisywanie w brajlu tekstów z dziedziny matematyki i fizyki nawet na poziomie obowiązującym na wyższych studiach. Zawierała zarówno wszystkie używane wówczas symbole matematyczne, jak również zasady ich tworzenia[17].

Stosowany powszechnie przez ludzi widzących zapis wzorów i wyrażeń matematycznych jest wielopoziomowy, obejmuje trzy alfabety (łaciński, grecki i gotycki), zawiera setki symboli graficznych, a wszystkie mogą w zależności od kontekstu przyjmować różny krój i wielkość. W brajlowskiej notacji wymienione sposoby zapisu, ze względu na fizyczne cechy pisma niewidomych, nie są możliwe. Dlatego używa się tu zastępczych środków dla oddania całego bogactwa znaków graficznych i wzajemnego ich położenia. Większość czarnodrukowych symboli matematycznych przedstawionych jest w brajlu za pomocą dwóch lub trzech znaków. W tekście matematycznym specyficzne dla polskiego alfabetu brajlowskiego litery (ą, ę, ć itp.) przybierają postać symboli matematycznych. Brajlowski znak złożony z punktów 1-6, w tekstach humanistycznych określa polskie „ą", natomiast w tekście matematycznym interpretowany jest jako indeks dolny.

Dla zinterpretowania w brajlu bardziej skomplikowanych wyrażeń i wzorów stosuje się wskaźniki poziomów (górnych i dolnych) oraz specjalne nawiasy i tzw. klucze brajlowskie. Poziom podstawowy, zwany inaczej zerowym, mają symbole

[16] M. Paplińska, *Brajl w nowoczesnych technologiach – kierunki przemian w edukacji i komunikacji niewidomych*, [w:] *Społeczeństwo równych szans. Tendencje i kierunki zmian*, red. D. Gorajewska, Warszawa, Stowarzyszenie Przyjaciół Integracji, 2005

[17] J. Omieciński, *Brajlowska notacja matematyczna*, „Tyfloświat" 2012, Nr 2 (16), s. 7

znajdujące się na linii tekstu. Kolejne poziomy określone są rekurencyjnie, zarówno w górę, jak i w dół.

Nemeth

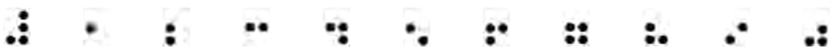
Abraham Nemeth urodził się 6 października 1918 r. w Nowym Jorku na Lower East Side na Manhattanie, w dużej rodzinie węgierskich emigrantów. Był niewidomy od urodzenia. Pomimo ślepoty uczęszczał do szkół publicznych oraz do Żydowskiej Szkoły dla Niewidomych w Yonkers. Następnie studiował psychologię w Brooklyn College. Tytuł magistra psychologii zdobył na Uniwersytecie Columbia. Nemeth w Brooklyn College studiował również matematykę i fizykę. Nie było to łatwe. Wielu nauczycieli akademickich zniechęcało go, uważając, iż nie ma szans poznać tej dziedziny nauki na tyle dokładnie, by móc ją studiować na poziomie akademickim. Jednak uparcie dążył do celu – kształcenia się w dziedzinie matematyki – wspierany przez swoją żonę. Po skończeniu edukacji Nemeth uczył w różnych szkołach w Nowym Jorku. Początkowo na pół etatu, ponieważ pracodawcy nie chcieli go zatrudniać, wiedząc, że był niewidomy. Z czasem jego reputacja stawała się coraz lepsza i zatrudniano go coraz chętniej. Okazało się, że był zdolnym matematykiem i nauczycielem. Różnił się jednak od innych osób niewidomych – był w stanie pisać listy drukowanymi i wizualnymi symbolami matematycznymi na papierze lub kredą na tablicach, tak jak osoby widzące. Tej umiejętności nauczył się jako dziecko. Po wielu latach powiedział, że: „[…] *ta umiejętność pozwoliła mu odnieść sukces w matematyce, w erze raczkującej technologii, podczas których nawet Braille był trudny w użyciu w matematyce*". W 1950 r. przeniósł się do Detroit, w stanie Michigan, aby objąć stanowisko na Uniwersytecie w Detroit razem z Keithem Rosenbergiem. Pozostał tam przez 30 lat, przeszedł na emeryturę w 1985 r.

Początkowo nauczał swoich studentów matematyki z zastosowaniem tabliczki Taylora. Jednak rachunki matematyczne stawały się coraz bardziej skomplikowane. System wynaleziony przez Taylora już nie wystarczał. Przede wszystkim był bardzo czasochłonny. Sprawę komplikował również fakt, iż pod koniec 1960 r. pojawiła się informatyka. Wtedy też okazało się, że potrzebna jest specjalna notacja brajlowska, która powinna bardziej efektywnie przekazać cały materiał z zakresu zaawansowanej matematyki. Ostatecznie w 1952 r. rozwinął własną notację (Nemeth – matematyczna notacja brajlowska). Notacja, zwana też Kodem Nemeth, przeszła szereg zmian od czasu powstania, ale nadal jest w powszechnym użyciu. Na marginesie można jeszcze dodać, iż Nemeth jest również odpowiedzialny za powstanie MathSpeak – systemu werbalnego przekazu rachunków matematycznych. W trakcie wykładów musiał skorzystać z pomocy osób widzących, które czytały materiały i teksty. Podobnie było, gdy dyktował swoje prace matematyczne i inne materiały, aby je zapisać, a następnie drukować. Nemeth opracował standardy efektywnego czytania tekstu matematycznego, które zostały zaakceptowane prze świat akademicki w Stanach Zjednoczonych. Z czasem ewoluowały. Jednakże MathSpeak jest szeroko stosowany podczas wykładów z nauk ścisłych na uniwersytetach amerykańskich.

Istnieje wiele poradników na temat, jak dobrze pisać, używając notacji Nemeth. Zasadą jest, że uczniowie czy studenci, którzy chcą używać tej notacji do matematyki, muszą doskonale znać zasady czytania i pisania w alfabecie Braille'a.

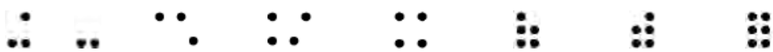
Kod literacki Braille'a zawiera również cyfry, ale nie było w nim znaków do pisania symboli używanych w matematyce, takich jak znak „+” lub „÷”. Ponadto brakowało znaków do opisania naprawdę trudnych problemów matematycznych, jak np. 4x - (7x + 5) = lub wykładników, jak $10^2 \times 12$ =. Nemeth wymyślił więc i wprowadził w życie własną notację brajlowską. Nazwa notacji pochodzi od jego nazwiska (Nemeth code).

Podobnie jak w literackim brajlu, tak i w ten notacji każda linijka zaczyna się od symbolu . Zatem ciąg liczby w notacji Nemeth wygląda następująco:



#	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

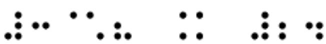
Oto kilka innych oznaczeń, które są używane w Nemeth:



+	-	×	÷	=	(	)	?

Jak można zauważyć, znak (mnożenia) „x” i (dzielenia) „÷” zajmują po dwie komórki.

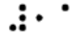
Poszczególne równania matematyczne możemy zatem zapisać, używając tej notacji w następujący sposób:

3 x 8 = 24 

lub 50 + 10 = 60 

lub (X - 7) (30 ÷ 5) = 18 

Abrahamowi Nemethowi nie wystarczały jednie proste zadania matematyczne. Chciał, korzystając z brajla, opisywać trudne, bardziej zawiłe problemy algebraiczne, geometryczne, a nawet używać rachunku różniczkowego. Musiał to wszystko zmieścić w sześciopunktowym alfabecie Braille'a. O czytelności pojedynczych znaków brajlowskich decyduje nie jeden, lecz kilka czynników nawzajem na siebie wpływających. Najistotniejszymi z nich wydaje się liczba punktów i ich konfiguracja (kształt znaku). Ważną rolę odgrywa też położenie punktów i wolnych przestrzeni wewnątrz sześciopunktu oraz odległości między punktami. To był jeden z powodów, dla których ponumerował komórki. W ten sposób nie myli się np. litery „a” z literackiej notacji Braille'a z „1” . W notacji Nemeth

„1a” zapisujemy następująco , a „c3” . Wykładnik ma specjalny symbol przed liczbą, w taki sposób, iż czytelnik wie, że jest „w powietrzu”. Symbol zapisujemy , np. dla 5^2.

Francuska brajlowska notacja matematyczna

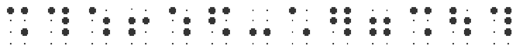
Braillowski kod matematyczny został dostosowany w 1922 r. przez Louisa-Auguste’a Antoine’a. Antoine uczył matematyki w gimnazjum do wybuchu I wojny światowej w 1914 r. Został wówczas zmobilizowany i wysłany na front. W wyniku ran odniesionych podczas walki stał się niewidomy. Nie było zatem mowy, aby mógł studiować matematykę na własną rękę. Pomocni okazali się przyjaciele: Henri Lebesgue, Marcel Brillouin i Gaston Julia. Wykonywali oni kopie brajlowskie najważniejszych traktatów matematycznych w taki sposób, że Antoine mógł przyswoić wiedzę matematyczną do poziomu potrzebnego, aby przeprowadzić badania. Jednak nie było to standardowe przedstawianie symboli matematycznych Braille’a. W 1919 r. Antoine, wspierany przez Bourguignona, który był studentem École Normale Supérieure w Saint-Cloud, wymyślił francuską wersję matematycznej notacji brajlowskiej. W tym samym roku Antoine zaczął wykładać na Uniwersytecie w Strasburgu, gdzie dwa lata później, 9 lipca 1921 r., obronił pracę doktorską: *Sur l’homéomorphie de deux figures et de leurs voisinages* (*Homeomorfizm dwóch liczb i ich okolic*). Istotą pracy było niezwykłe odkrycie, które dzisiaj jest znane jako „Naszyjnik Antoine’a”. Po obronie został profesorem na Uniwersytecie w Rennes. Notację, którą stworzył, zmieniano jeszcze wiele razy. Po raz pierwszy została zmieniona w 1971 r. Ostatnia dokonana zmiana, w 2007 r., miała na celu poprawę współpracy między osobami widzącymi i niewidomymi oraz w celu ułatwiania automatycznej transkrypcji[18]. Notacja ta poza Francją jest również używana na Madagaskarze oraz w Portugalii.

Niemiecka brajlowska notacja matematyczna

W Niemczech występują dwie odmiany notacji: marburska i stuttgarcka. Notacja marburska jest stosowana w krajach niemieckojęzycznych. Została zaprojektowana w 1955 r. w Marburskiej Szkole dla Niewidomych przez Helmuta Ephesera, Karla Britza i Friedricha Mittelstena Scheida. Mocno przerobione i poprawione wydanie ukazało się w 1986 r. Kod ten jest stosowany co najmniej w Niemczech, Austrii i Polsce (z niewielkimi zmianami). Do 1990 r. był również

[18] *Notation Mathématique Braille (Mise à jour de la notation mathématique en braille de 1971)*, by Commission Évolution du Braille Français, INJA and AVH, Paris, 2001; *Notation Mathématique Braille*, by Commission Évolution du Braille Français, INJA and AVH, Paris, 2007

stosowany w Danii, Holandii, Norwegii i byłej Jugosławii[19]. Występuje jeszcze stuttgarcka notacja matematyczna. Jest to zapis w oparciu o 8-punktowy wzór (except Lambda kod liniowy)[20]:

$345 + 56 - 17 = 384$ 

Dla zinterpretowania w brajlu bardziej skomplikowanych wyrażeń i wzorów stosuje się wskaźniki poziomów (górnych i dolnych) oraz specjalne nawiasy i tzw. klucze brajlowskie. Poziom podstawowy, zwany inaczej zerowym, mają symbole znajdujące się na linii tekstu. Kolejne poziomy określone są rekurencyjnie, zarówno w górę, jak i w dół.

Jednym z najprostszych przykładów zapisywania wyrażeń wielopoziomowych może być ułamek: $\frac{x+1}{x-1}$. W skróconej postaci ułamek ten zapisujemy bez odstępów pomiędzy symbolami, a zamiast spacji stosujemy wskaźnik poziomu pierwszego (punkt 4). Licznik od mianownika oddzielamy znakiem kreski ułamkowej (punkty 1-2-5-6). Należy zaznaczyć, że w brajlowskim zapisie powyższego wyrażenia kreska ułamkowa znajduje się na poziomie zerowym, a licznik i mianownik – odpowiednio na poziomach +1 i -1[21].

Cyfry w brajlu zapisujemy, umieszczając przed pierwszymi 10. literami (w zapisie małe litery a-j) znak liczby (numeryk – punkt 3,4,5,6) i otrzymujemy 1 – numeryk a, 2 – numeryk b, 3 – numeryk c, itd. Stosując tę notację 123 zapisujemy numeryk abc (bez odstępu). Symbole działań arytmetycznych mają własne zapisy, np. plus, minus, potęgowanie itp. Działania wykonywane sposobem pisemnym – dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie na liczbach naturalnych i ułamkach dziesiętnych wykonuje się na kubarytmach (specjalna tabliczka, na której umieszcza się kostki z liczbami).

Brytyjska brajlowska notacja matematyczna

Brytyjska notacja matematyczna jest używana w Wielkiej Brytanii i Irlandii. Po raz pierwszy została opublikowana w 1970 r. W 1987 r. została ona gruntownie zmieniona. Ostatnia zmiana była wprowadzona w 2005 r. System ten jest używany (różne wersje w zależności od różnych krajów) w Australii, Barheinie,

[19] H. Epheser, K. Britz, F. M. Scheid, *Neufassung und vervollständigung des systems der Internationalen mathematikschrift für blinde*, Standige Arbeitsgemeinschaft „Mathematikschrift", Deutsche Blindenstudienanstalt eV, Marburg, 1986

[20] W. Schweikhardt, *Stuttgarter Mathematikschrift für Blinde*, Report Nr. 3/87, Stuttgart, Institut für Informatik, Universität Stuttgart, 1987

[21] S. Jakubowski, *Brajlowska notacja matematyczna*, [w:] *Poradnik dydaktyczny dla nauczycieli realizujących podstawę programową w zakresie szkoły podstawowej i gimnazjum z uczniami niewidomymi i słabo widzącymi*, red. S. Jakubowski, Warszawa, Ministerstwo Edukacji Narodowej, 2001, s. 226

Hong-Kongu, Iranie, Irlandii, Jordanii, Kenii, Nigerii, Arabii Saudyjskiej, Sierra Leone, Singapurze, Wielkiej Brytanii i Zimbabwe[22].

Holenderska brajlowska notacja matematyczna

Zbiór zasad, zainspirowany został notacją marburską. Powstała w 1983 r. Zmieniona wersja notacji użytkowej została wydana przez Dedicon w październiku 2009 r. Nowa wersja umożliwia niewidomemu zarówno zapoznanie się z brajlowską notacją matematyczną, jak i symbolami czarnodrukowymi. W ten sposób ułatwia zrozumienie i współpracę pomiędzy widzącymi nauczycielami i niewidzącymi uczniami, również przy użyciu komputera. Uwzględnia uznane najlepsze praktyki (międzynarodowe) notacji używanych podczas linearyzacji matematyki dla celów komputerowych, np. w arkuszach kalkulacyjnych, obliczania oprogramowania lub nawet zwykłego e-maila[23].

Polska brajlowska notacja matematyczna

Polska adaptacja zapisu brajlowskiego, opracowana przez Elżbietę Różę Czacką i Teresę Landy, która została przyjęta dekretem Ministerstwa Wyznań Religijnych i Oświecenia Publicznego z 25 maja 1934 r., zawierała cyfry i podstawowe symbole matematyczne. Było to wystarczające na poziomie ówczesnej edukacji i nie tylko, bo jeszcze na początku XX w. w tekstach matematycznych znajdowało się bardzo mało symboli, dominował opis słowny, a więc łatwy do zapisu pismem punktowym. Stopniowo zapis matematyczny stawał się coraz bardziej formalny, skomplikowany, przybywało symboli, a więc był kłopotliwy w zapisie punktowym. W celu uporządkowania brajlowskich zapisów matematycznych w ośrodkach dla niewidomych PZN powołał w 2000 r. wieloosobowy zespół, którym kierował Andrzej Galbarski, a po jego śmierci Jan Świerczek. Efektem pracy zespołu było wydanie w 2002 r. czarnodrukowej publikacji *Brajlowska notacja matematyczna, fizyczna, chemiczna*. Była ona dostępna również w plikach PDF, a więc niewidomi nie mogli samodzielnie z niej korzystać. Niestety, oparto się w niej wyłącznie na *Międzynarodowej notacji matematycznej dla niewidomych* z 1955 r., pomijając wszystkie zmiany i uproszczenia wprowadzone w międzynarodowej brajlowskiej notacji matematycznej w 1986 r., a więc nie była ona zgodna z obowiązującą wówczas międzynarodową brajlowską notacją matematyczną[24].

[22] *Braille mathematics notation, Braille Autority of the United Kingdom*, RNIB, Peterborough, UK, 2001

[23] *Wiskunde notatie Dedicon*, http://wiskunde.dedicon.nl/, [dostęp: 2013-09-20]

[24] J. Omieciński, *Brajlowska notacja matematyczna*, „Tyfloświat” 2012, Nr 2 (16), s. 7

Woluwe

Woluwe został opracowany w latach 60. w holenderskiej części Belgii. Notacja jest oparta na kodzie marburskim. Twórcy kodu Woluwe – Gilbert Notaert, Marc Suij i Emmanuel Vandekerkhove – byli nauczycielami w Koninklijk Instituut Woluwe (Królewski Instytut dla Osób Głuchych i Niewidomych) w Sint-Lambrechts-Woluwe, na przedmieściach Brukseli[25].

Japońska brajlowska notacja matematyczna

Obecny zapis matematyczny japoński Braille został opublikowany w 2001 r. przez Japoński Komitet do spraw Braille'a. Zawiera notację matematyczną, opartą na zapisie opublikowanym w 1956 r. przez Japan Research Group Braille'a (Nihon Tenji Kenkyukai)[26].

HRTeX i LaTeX

HRTeX (do czytania TeX) to notacja opracowana na Uniwersytecie Johannesa Keplera w Linzu, w Austrii, z zamiarem dostarczenia materiałów dydaktycznych z matematyki i innych przedmiotów ścisłych w sposób bardziej czytelny niż za pomocą TEX lub lateksu. HRTeX pochodzi z TeX-a, chociaż nie jest z nim do końca zgodne. Mają wiele różnic:

- • wiele symboli zostało skróconych (np. symbole dla greckich liter składają się z dwóch pierwszych znaków, np. „al." zamiast „alfa", „be" zamiast „beta" itp.);
- • nazwy funkcji standardowych są zapisywane jak zmienne, ale z wielkich liter, np.„LOG" zamiast „log", „SIN" zamiast „sin", itp.);
- • istnieje alternatywne oznaczenie dla poszczególnych frakcji: frakcja reprezentowana jest przez dwa ukośniki - / / -, a cała frakcja jest napisana jako grupa. Na przykład, {a + b / / c + d} zamiast {a + b} {c + d}.

Praca z systemem LaTeX opiera się na idei logicznego formatowania tekstu. Stosując takie formatowanie, autor przygotowuje, przy użyciu dowolnego edytora tekstu, plik wejściowy zawierający oprócz tekstu instrukcje formatujące. Plik ten następnie jest przetwarzany przez program edycji tekstu, który tworzy plik wyjściowy, przeznaczony do wydruku. Do systemu LaTeX stworzony został dodatkowy pakiet o nazwie „braille", umożliwiający składanie dokumentów zawierających tekst w brajlu czarnodrukowym. Pierwszą wersję systemu LaTeX opracował Leslie Lamport.

---

[25] G. Notaert, M. Suij, E. Vandekerkhove, *Handleiding Braillesymbolen wiskunde*, Woluwe, Koninklijk Instituut Woluwe, 1984

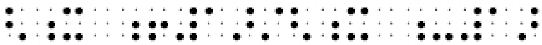
[26] *Explanation of Braille Mathematics Symbols, Japan Braille Committee*, Japan Braille Committee, Tokyo, 1981

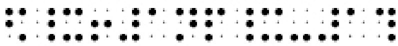
AMS

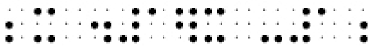
ASCII Maths Notation (AMS) został opracowany w Uniwersytecie w Karlsruhe przez Christopha Schönberga w 1993 r. Notacja ta korzysta wyłącznie z 128 znaków w 7-bitowym standardzie ASCII, co sprawia, że jest niezależną platformą. AMS jest stosowany w Niemczech, Austrii i niektórych krajach Europy Wschodniej[27].

Różnice pomiędzy kilkoma notacjami (Nemeth code (1) brytyjska (2) włoska (3) czeska (4)) można pokazać na przykładzie zapisu działania $\frac{x+1}{x-1}$:

(1) 

(2) 

(3) 

(4) 

Zakończenie

Matematyka jest przedmiotem ścisłym. Często nazywa się ją królową nauk. Jak powiedział Albert Einstein, spośród wszystkich innych nauk matematyka przede wszystkim z jednego powodu cieszy się szczególnym poważaniem: jej twierdzenia są bezwzględnie pewne i niezaprzeczalne, podczas gdy twierdzenia wszystkich innych nauk są do pewnego stopnia przedmiotem sporu i wciąż narażone na obalenie wskutek odkrycia nowych faktów. Głównym sposobem uczenia się matematyki jest rozwiązywanie zadań. Jest to źródło doświadczeń logicznych i matematycznych. Można powiedzieć, że bez rozwiązywania zadań nie można nauczyć się matematyki. Rozwiązanie każdego zadania, nawet łatwego, jest równoznaczne z pokonaniem trudności. Próby umożliwienia osobom niewidomym samodzielnego czytania tekstów matematycznych, jak również ich pisania, rozwiązywania zadań oraz budowania figur geometrycznych podejmowane są od wielu stuleci. Wielkie zasługi w tej kwestii należy przypisać samym niewidomym, a szczególnie Nicholasowi Saundersonowi, Louisowi Antoine'owi, Lwowi Pontryaginowi, Leonardowi Eulerowi i innym, ale nie mniej ważnym osobom w historii niepełnosprawności. W proces ten włączały się również osoby widzące, jak: William Taylor, Victor Narcisse Ballu, William Preston Holly oraz Henry Martin Taylor. Dzięki tym osobom, a szczególnie wynalazkom, urządzeniom i notacjom, które stworzyli, osoby z niepełnosprawnością wzroku zyskały nową szansę na studia oraz karierę naukową w dziedzinie matematyki. Mimo to do dzisiaj nie

[27] *ASCII-Mathematikschrift AMS – Anleitung zur Umsetzung mathematischer Formeln*, Nov 2001, http://chezdom.net/wp-content/uploads/2008/11/ams.pdf, [dostęp: 2013-09-20]

istnieje kompleksowe, w pełni zadowalające użytkowników, rozwiązanie tego zagadnienia. Barierę wspólnej pracy niewidomych i widzących nad tekstem zawierającym formuły matematyczne stanowi to, że w notacji ludzi widzących są one eksponowane w formie dwuwymiarowych zestawów symboli graficznych, natomiast w alfabecie brajlowskim ta ekspozycja jest zawężona i ma formę zapisu liniowego. Dodatkowy problem stanowi interpretacja znaczeniowa poszczególnych symboli, która często zależy od kontekstu (sąsiedztwo z innymi symbolami, odstęp przed lub po symbolu itp.). Automatyczna translacja pomiędzy tymi dwoma sposobami wyrażenia języka matematyki jest problemem dość złożonym. Niemniej, jak pokazuje historia, problemy „techniczne", takie jak niemożność czytania tekstów, słuchania czy wypowiadania się, da się przezwyciężyć dzięki pomocy innych osób i aparatury, trudniej jednak pojąć, że można uprawiać naukę bez wykorzystywania wszystkich zmysłów. Wzrok, słuch i pozostałe zmysły wydają się niezbędne do pełnego postrzegania świata, opisywania i tłumaczenia rzeczywistości, czyli tego, czym zajmują się naukowcy. Tymczasem wcale tak nie jest, bo w większości dziedzin nauki najważniejsze jest to, co odbywa się w umyśle. Brak któregoś ze zmysłów może wręcz ułatwić pracę mózgowi. Niewidomi, na przykład, mają nie tylko bardziej wyczulony słuch i dotyk, ale często również sprawniejszą wyobraźnię matematyczną. Dzięki niej potrafią rozwiązywać problemy, z którymi widzący zmagają się bez większych sukcesów.

Bibliografia

ASCII-Mathematikschrift AMS – Anleitung zur Umsetzung mathematischer Formeln, http://chezdom.net/wp-content/uploads/2008/11/ams.pdf

Braille mathematics notation, Braille Autority of the United Kingdom, RNIB, Peterborough, UK, 2001

Epheser H., Britz K., Scheid F. M., *Neufassung und vervollständigung des systems der Internationalen mathematikschrift für blinde*, „Standige Arbeitsgemeinschaft Mathematikschrift", Deutsche Blindenstudienanstalt eV, Marburg, 1986

Explanation of Braille Mathematics Symbols, Japan Braille Committee, Japan Braille Committee, Tokyo, 1981

Good A., Writing-machines for the blind, http://en.wikisource.org/wiki/Popular_Science_Monthly/Volume_33/September_1888/Writing-Machines_for_the_Blind

Hoffman P., *The Man Who Loved Only Numbers: The Story of Paul Erdős and the Search for Mathematical Truth*, Nowy Jork, Hyperion, 1998

Jakubowski S., *Brajlowska notacja matematyczna*, [w:] *Poradnik dydaktyczny dla nauczycieli realizujących podstawę programową w zakresie szkoły podstawowej i gimnazjum z uczniami niewidomymi i słabo widzącymi*, red. Jakubowski S., Warszawa, Ministerstwo Edukacji Narodowej, 2001

Mathematics and the Blind Student, „New Beacon" 1934, Vol. XVIII, No. 210

Notaert G., Suij M., Vandekerkhove E., *Handleiding Braillesymbolen wiskunde*, Woluwe, Koninklijk Instituut Woluwe, 1984

Notation Mathématique Braille (Mise à jour de la notation mathématique en braille de 1971), by Commission Évolution du Braille Français, INJA and AVH, Paris, 2001

Notation Mathématique Braille, by Commission Évolution du Braille Français, INJA and AVH, Paris, 2007

Omieciński J., *Brajlowska notacja matematyczna*, „Tyfloświat" 2012, Nr 2 (16)

Paplińska M., *Brajl w nowoczesnych technologiach – kierunki przemian w edukacji i komunikacji niewidomych*, [w:] *Społeczeństwo równych szans. Tendencje i kierunki zmian*, red. Gorajewska D., Warszawa, Stowarzyszenie Przyjaciół Integracji, 2005

Ptak J. F., *A million words on connections in the history of science, math and technology with images, social history and general found environments*, http://longstreet.typepad.com/thesciencebookstore/2008/05/page/3/

Schweikhardt W., *Stuttgarter Mathematikschrift für Blinde*, Report Nr.3/87, Stuttgart, Institut für Informatik, Universität Stuttgart, 1987

Stigler S. M., *Statistics on the Table: The History of Statistical Concepts and Methods*, Boston, Harvard University, 1999

Szansa dla niewidomych na karierę naukową w dziedzinie matematyki, http://www.naukawpolsce.pap.pl/aktualnosci/news,18464,szansa-dla-niewidomych-na-kariere-naukowa-w-dziedzinie-matematyki.html

Wiskunde notatie Dedicon, http://wiskunde.dedicon.nl/